

### 13. Knobelaufgabe #4



Ein Ausdruck besteht aus einer Folge von Zeichen; ein Ausdruck vom Typ *String* wertet zu einer Zeichenfolge aus. Schreiben Sie ein Programm, das zu seinem eigenen Programmtext auswertet.

Easy!

Mini) "done"  
"done"



Nicht ganz Harry: das Programm "done" besteht aus 6 Zeichen, sein Wert aus 4.

??? ... Ach so, die Anführungsstriche!!! Schnell repariert:

Mini) show "done"  
"\"done\""



Ich sehe, Du hast die Funktion *show* entdeckt, die einen Wert in seine externe Darstellung überführt. Jetzt besteht Dein Programm aus 11 Zeichen, der Wert aus 6.  
*Ein Tipp:* wenn Du nach der Auswertung des Ausdrucks *putline* it eintippst, musst Du Zeichen für Zeichen den Programmtext erhalten.

### 13. Motivation

- ▶ Rechnungen sind in der Regel nicht linear, sie enthalten Zwischen- oder Hilfsrechnungen.
- ▶ Beispiel: Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats:
  - ▶ zunächst: Seitenlänge ausrechnen,
  - ▶ dann: Ergebnis der Zwischenrechnung mit sich selbst multiplizieren.
- ▶ Um das Ergebnis einer Zwischenrechnung gegebenenfalls mehrfach verwenden zu können, geben wir ihm einen Namen :

**let**  $s = 4711 + 815$

Das Konstrukt ist eine *Wertdefinition*: der Bezeichner links wird an den Wert des Ausdrucks rechts gebunden. *Lies*: sei  $s$  gleich  $4711 + 815$ .

- ▶ Ein Bezeichner ist ein Ausdruck und somit auch:

$s * s$

Der obige Ausdruck berechnet den gewünschten Flächeninhalt.

### 13. Motivation

- ▶ Welcher Bezeichner kann wo verwendet werden?
- ▶ Wie werden Wertdefinitionen und Ausdrücke verknüpft?
- ▶ Der Zusammenhang wird durch einen *in*-Ausdruck hergestellt.

**let**  $s = 4711 + 815$  **in**  $s * s$

- ▶ Vor *in* steht eine Wertdefinition.
- ▶ Nach *in* steht ein Ausdruck.
- ▶ Das gesamte Konstrukt ist wiederum ein Ausdruck.
- ▶ Der Bezeichner  $s$  ist nur in  $s * s$  *sichtbar*.

### 13. Beispiel: Ausflug in den Zoo

#### Problem:

Die Klasse 2c macht einen Ausflug in den Zoo. Es fahren 27 Schülerinnen und Schüler und 3 Lehrer mit. Die Fahrtkosten betragen 2€ für Kinder und 3€ für Erwachsene. Kinder zahlen 5€ Eintritt und Erwachsene 10€. Wie teuer ist der Ausflug?

Berechnung der Kosten:

**let** *Schüler* = 27 **in**  
**let** *Lehrer* = 3 **in**  
**let** *Fahrtkosten* = 2 \* *Schüler* + 3 \* *Lehrer* **in**  
**let** *Eintritt* = 5 \* *Schüler* + 10 \* *Lehrer* **in**  
*Fahrtkosten* + *Eintritt*

Benennung von Teilrechnungen.

### 13. Wahl der Bezeichner

- Der Bezeichner in einer Wertedefinition kann frei gewählt werden:

**let**  $s = 4711 + 815$  **in**  $s * s$

ist gleichwertig zu

**let**  $size = 4711 + 815$  **in**  $size * size$

- Für das Ausrechnen spielen Namen keine Rolle, wohl aber für den menschlichen Betrachter eines Programms. *Deshalb*: möglichst aussagekräftige Bezeichner vergeben.
- Allgemein gilt*: je größer der Sichtbarkeitsbereich eines Namens, desto mehr Sorgfalt sollte man bei der Namenswahl walten lassen.

### 13. Abstrakte Syntax — Definitionen

Wir führen eine neue syntaktische Kategorie ein: *Deklarationen*.

$x \in Id$	<i>Bezeichner</i>
$d \in Decl ::=$	<i>Deklarationen:</i>
<b>let</b> $x = e$	<i>Wertedefinition</i>

- Der Bereich der Bezeichner  $Id$  wird in Teil VI genau festgelegt.
- Für's erste*: ein Bezeichner fängt mit einem Buchstaben an. Danach können weitere Buchstaben, Ziffern, und Sonderzeichen wie ein Unterstrich oder ein Apostroph folgen.

### 13. Abstrakte Syntax — Ausdrücke

Ein *in*-Ausdruck verknüpft eine Definition mit einem Ausdruck.

$e ::= \dots$	<i>lokale Definitionen:</i>
$x$	Bezeichner
<b>d in</b> $e$	lokale Definition

Der Teilausdruck  $e$  heißt Rumpf des *in*-Ausdrucks.

### 13. Statische Semantik

- Wie werden *in*-Ausdrücke typisiert?

**let**  $s = 4711 + 815$  **in**  $s * s$

Wenn wir den Teilausdruck  $s * s$  typisieren, woher kennen wir den Typ von  $s$ ?

- Ein Bezeichner kann in unterschiedlichen Kontexten einen unterschiedlichen Typ besitzen.

**(let**  $s = true$  **in**  $s$ ) **&&** **(let**  $s = 815$  **in**  $s * s > 4711$ )

### 13. Statische Semantik — Signatur

- Wir merken uns die Typen von Bezeichnern mit Hilfe einer sogenannten Signatur.

$$\Sigma \in \text{Sig} = \text{Id} \rightarrow_{\text{fin}} \text{Type} \quad \text{Signatur}$$

Eine Signatur ist eine endliche Abbildung von Bezeichnern auf Typen.

- Wir erweitern die Typregeln um Signaturen. Die Regeln spezifizieren die nunmehr dreistellige Relation

$$\Sigma \vdash e : t$$

zwischen Signaturen, Ausdrücken und Typen. Lies: „bezüglich der Signatur  $\Sigma$  hat  $e$  den Typ  $t$ “.

### 13. Statische Semantik — Definitionen

Die statische Semantik ordnet

- einem Ausdruck einen Typ und
- einer Definition eine Signatur

zu.

Typregel:

$$\frac{\Sigma \vdash e : t}{\Sigma \vdash (\text{let } x = e) : \{x \mapsto t\}}$$

☞ Eine Signatur repräsentiert — ähnlich wie ein Typ — das, was wir über eine Definition statisch wissen.

### 13. Statische Semantik — Ausdrücke

Typregeln:

$$\frac{}{\Sigma \vdash x : \Sigma(x)} \quad x \in \text{dom } \Sigma$$

☞ Zu jedem Bezeichner muss eine definierende Bindung existieren.

$$\frac{\Sigma \vdash d : \Sigma' \quad \Sigma, \Sigma' \vdash e : t}{\Sigma \vdash (d \text{ in } e) : t}$$

☞ Der Teilausdruck  $e$  wird bezüglich der Signatur  $\Sigma, \Sigma'$  typisiert. Der Kommaoperator erweitert  $\Sigma$  um  $\Sigma'$  und regelt Überschneidungen.

### 13. Statische Semantik — Beispiel

Beispiel für einen wohlgetypten Ausdruck:

$$\frac{\frac{}{\emptyset \vdash 47 : \text{Nat}} \quad \frac{\{s \mapsto \text{Nat}\} \vdash s : \text{Nat} \quad \{s \mapsto \text{Nat}\} \vdash s : \text{Nat}}{\{s \mapsto \text{Nat}\} \vdash s * s : \text{Nat}}}{\emptyset \vdash (\text{let } s = 47) : \{s \mapsto \text{Nat}\}} \quad \frac{}{\emptyset \vdash (\text{let } s = 47 \text{ in } s * s) : \text{Nat}}$$

Beispiel für einen *nicht* wohlgetypten Ausdruck:

$$\frac{\frac{}{\emptyset \vdash 47 : \text{Nat}} \quad \frac{\{s \mapsto \text{Nat}\} \vdash s : \text{Nat} \quad \{s \mapsto \text{Nat}\} \vdash a : \text{Nat} ?}{\{s \mapsto \text{Nat}\} \vdash s * a : \text{Nat}}}{\emptyset \vdash (\text{let } s = 47) : \{s \mapsto \text{Nat}\}} \quad \frac{}{\emptyset \vdash (\text{let } s = 47 \text{ in } s * a) : \text{Nat}}$$

☞ Die Formel  $\{s \mapsto \text{Nat}\} \vdash a : \text{Nat}$  lässt sich nicht ableiten.

### 13. Dynamische Semantik

- ▶ Wie werden **in**-Ausdrücke ausgerechnet?

$let\ s = 4711 + 815\ in\ s * s$

Wenn wir den Teilausdruck  $s * s$  ausrechnen, woher kennen wir den Wert von  $s$ ?

- ▶ Ein Bezeichner kann in unterschiedlichen Kontexten einen unterschiedlichen Wert besitzen.

$(let\ s = true\ in\ s) \ \&\&\ (let\ s = 815\ in\ s * s > 4711)$

### 13. Dynamische Semantik — Umgebung

- ▶ Wir merken uns die Werte von Bezeichnern mit Hilfe einer sogenannten Umgebung.

$\delta \in Env = Id \rightarrow_{fin} Val$  *Umgebung*

Wie eine Signatur ist eine Umgebung eine endliche Abbildung; im Unterschied zur Signatur bildet sie Bezeichner auf *Werte* ab.

- ▶ Wir erweitern die Auswertungsregeln um Umgebungen. Die Regeln spezifizieren die nunmehr *dreistellige* Relation

$\delta \vdash e \Downarrow \nu$

zwischen Umgebungen, Ausdrücken und Werten. *Lies:* „bezüglich der Umgebung  $\delta$  wertet  $e$  zu  $\nu$  aus“.

### 13. Dynamische Semantik — Definitionen

Die dynamische Semantik ordnet

- ▶ einem Ausdruck einen Wert und
- ▶ einer Definition eine Umgebung

zu.

Auswertungsregel:

$\frac{\delta \vdash e \Downarrow \nu}{\delta \vdash (let\ x = e) \Downarrow \{x \mapsto \nu\}}$

### 13. Dynamische Semantik — Ausdrücke

Auswertungsregeln:

$\frac{}{\delta \vdash x \Downarrow \delta(x)} \quad x \in dom\ \delta$

- ☞ Zu jedem Bezeichner muss eine definierende Bindung existieren.

$\frac{\delta \vdash d \Downarrow \delta' \quad \delta, \delta' \vdash e \Downarrow \nu}{\delta \vdash (d\ in\ e) \Downarrow \nu}$

- ☞ Der Teilausdruck  $e$  wird bezüglich der Umgebung  $\delta, \delta'$  ausgewertet. Der Kommaoperator erweitert  $\delta$  um  $\delta'$  und regelt Überschneidungen.

### 13. Dynamische Semantik — Beispiel

$$\frac{\frac{\frac{}{\emptyset \vdash 4711 + 815 \Downarrow 5526}}{\emptyset \vdash \mathbf{let} s = 4711 + 815 \Downarrow \delta}}{\emptyset \vdash \mathbf{let} s = 4711 + 815 \mathbf{in} s * s \Downarrow 30536676} \quad \frac{\frac{}{\delta \vdash s \Downarrow 5526}}{\delta \vdash s * s \Downarrow 30536676} \quad \frac{}{\delta \vdash s \Downarrow 5526}}{\delta \vdash s * s \Downarrow 30536676}$$

wobei  $\delta = \{s \mapsto 5526\}$

- Der Rumpf  $s * s$  wird bezüglich der Umgebung  $\{s \mapsto 5526\}$  ausgerechnet.
- Aus Gründen der Übersichtlichkeit kürzen wir einfache Teilrechnungen ab.

III Werte  
Ralf Hinze  
Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Demo

Mini)  $\mathbf{let} s = 4711 + 815 \mathbf{in} s * s$   
30536676  
Mini)  $\mathbf{let} size = 4711 + 815 \mathbf{in} size * size$   
30536676  
Mini)  $(\mathbf{let} s = 4711 + 815 \mathbf{in} s * s) + 1$   
30536677  
Mini)  $(\mathbf{let} s = 4711 \mathbf{in} s * s) + (\mathbf{let} s = 815 \mathbf{in} s * s)$   
22857746  
Mini)  $\mathbf{let} s = 4711 \mathbf{in} \mathbf{let} a = s * s \mathbf{in} a + s$   
22198232

III Werte  
Ralf Hinze  
Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Freie Bezeichner

Ein Bezeichner, der nicht im Geltungsbereich einer Definition liegt, heißt *frei*.

Ausdruck	freie Bezeichner
$s * s$	$\{s\}$
$s * a$	$\{a, s\}$
$\mathbf{let} s = 4711 \mathbf{in} s * s$	$\emptyset$
$\mathbf{let} s = 4711 \mathbf{in} s * a$	$\{a\}$

- In dem Ausdruck  $d \mathbf{in} e$  werden die in  $d$  definierten Bezeichner von den freien Bezeichner in  $e$  abgezogen.

Ein Ausdruck, der keine freien Bezeichner enthält, heißt *geschlossen*.

III Werte  
Ralf Hinze  
Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Invarianten der Semantik

Invariante der statischen Semantik:

Die statische Semantik typisiert nur Ausdrücke, deren freie Bezeichner in der Signatur aufgeführt werden. — Bevor ein Teilausdruck, der freie Bezeichner enthält, typisiert wird, wird zunächst die Signatur um die Typen der freien Bezeichner erweitert.

Invariante der dynamischen Semantik:

Die dynamische Semantik legt nur die Bedeutung von Ausdrücken fest, deren freie Bezeichner in der Umgebung aufgeführt werden. — Bevor ein Teilausdruck, der freie Bezeichner enthält, ausgewertet wird, wird zunächst die Umgebung um die Werte der freien Bezeichner erweitert.

III Werte  
Ralf Hinze  
Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster



### 13. Demo

```
Mini) (let s = 4711 in s * s) + (let s = 815 in s * s)
22857746
Mini) let s = 4711 in let s = 815 in s * s
664225
Mini) let s1 = 4711 in let s2 = 815 in s2 * s2
664225
Mini) let s = 4711 in let a = s * s in a + a
44387042
Mini) let a = let s = 4711 in s * s in a + a
44387042
```

III Werte  
Ralf Hinze

Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Über den Tellerrand: F#

Wollen wir mehrere Definitionen in einem Ausdruck verwenden, müssen wir **in**-Ausdrücke aneinanderreihen.

```
let a = 4711
    + 815
in let b = a * a
   in a + b
```

F# erlaubt alternativ das Ende einer lokalen Definition und den Anfang des Rumpfes mit Hilfe des *Layouts* festzulegen.

```
let a = 4711
    + 815
let b = a * a
a + b
```

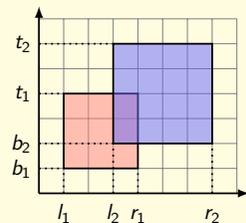
*Abseitsregel*: die Einrückung bestimmt die Zugehörigkeit von Teilausdrücken. Einrückung: der „aktuelle“ Ausdruck wird weitergeführt; keine Einrückung: ein neue Definition oder der Rumpfausdruck wird begonnen.

III Werte  
Ralf Hinze

Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Beispiel: Berechnung der Wohnfläche

Die Fläche einer Wohnung mit dem unten skizzierten Grundriss soll berechnet werden.



(Das ist eine Vereinfachung, das Ergebnis des schon angesprochenen Abstraktionsprozesses, mit dem wir Aufgaben in Rechenaufgaben verwandeln.)

III Werte  
Ralf Hinze

Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Beispiel: Berechnung der Wohnfläche

Erfassung der Daten:

```
let l1 = 1
let r1 = 4
let b1 = 1
let t1 = 4
let l2 = 3
let r2 = 7
let b2 = 2
let t2 = 6
```

III Werte  
Ralf Hinze

Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Beispiel: Berechnung der Wohnfläche

**Gesamtfläche:** Summe der beiden Quadratflächen minus der Schnittfläche.

```
let s1 = r1 ÷ l1
let s2 = r2 ÷ l2
let w = r1 ÷ l2
let h = t1 ÷ b2
s1 * s1 + s2 * s2 ÷ w * h
```

Vermeidung von Mehrfachrechnungen:  $s_1 * s_1$  statt  $(r_1 \div l_1) * (r_1 \div l_1)$ .

```
Mini) ...
Mini) s1 * s1 + s2 * s2 ÷ w * h
23
```

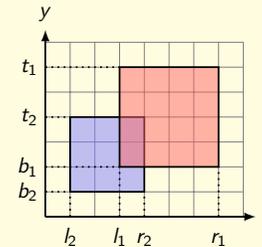
Die Wohnfläche beträgt somit  $23 m^2$ .

III Werte  
Ralf Hinze

Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Beispiel: Berechnung der Wohnfläche

Ändern wir die Daten, indem wir die Koordinaten der beiden Quadrate "vertauschen",



```
let l1 = 3
let r1 = 7
let b1 = 2
let t1 = 6
let l2 = 1
let r2 = 4
let b2 = 1
let t2 = 4
```

erleben wir eine unangenehme Überraschung:

```
Mini) let l1 = 3
Mini) ...
Mini) s1 * s1 + s2 * s2 ÷ w * h
0
```

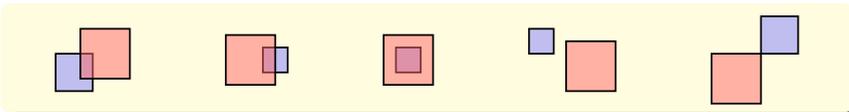
III Werte  
Ralf Hinze

Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Beispiel: Berechnung der Wohnfläche

Das obige Programm macht unausgesprochene Annahmen über die relative Lage der beiden Quadrate. (Welche?)

Wollen wir das Programm "robuster" machen, müssen wir die Lage der Quadrate berücksichtigen. Viele unterschiedliche Konstellationen sind denkbar:



Wie werden wir Herr oder Frau der Lage?

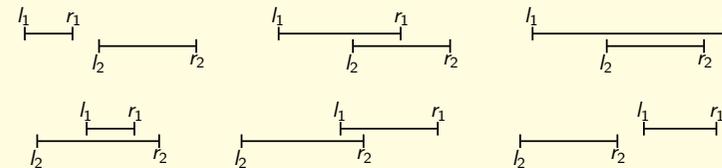
**Entscheidende Einsicht:** Überschneidungen können *getrennt* für jede der beiden Koordinatenachsen ausgerechnet werden. Auf diese Weise wird ein 2-dimensionales auf ein 1-dimensionales Problem zurückgeführt.

III Werte  
Ralf Hinze

Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Beispiel: Berechnung der Wohnfläche

Konzentrieren wir uns auf die x-Achse. Wenn wir annehmen, dass  $l_1 < r_1$  und  $l_2 < r_2$  gilt, dann ergeben sich sechs mögliche Konstellationen:



Länge der Überschneidung:  $\min r_1 r_2 \div \max l_1 l_2$ .

III Werte  
Ralf Hinze

Boolesche Werte  
Natürliche Zahlen  
Werte/-definitionen  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung  
Über den Tellerrand  
Funktions/-definitionen  
Funktionsausdrücke  
Rekursion  
Entwurfsmuster

### 13. Intermezzo: Minimum und Maximum

► *Minimum* von  $e_1$  und  $e_2$ :

```
if  $e_1 \leq e_2$  then  $e_1$  else  $e_2$ 
```

► *Maximum* von  $e_1$  und  $e_2$ :

```
if  $e_1 \leq e_2$  then  $e_2$  else  $e_1$ 
```

☞ Wir kürzen das Minimum von  $e_1$  und  $e_2$  mit  $\min e_1 e_2$  und das Maximum mit  $\max e_1 e_2$  ab.

III Werte

Ralf Hinze

Boolesche Werte

Natürliche Zahlen

Werte/-definitionen

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische Semantik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Funktions/-definitionen

Funktionsausdrücke

Rekursion

Entwurfsmuster

160

### 13. Intermezzo: Minimum und Maximum

☞ Ist die Berechnung von  $e_1$  oder  $e_2$  aufwändig, formuliert man besser:

► *Minimum* von  $e_1$  und  $e_2$ :

```
let  $a_1 = e_1$   
let  $a_2 = e_2$   
if  $a_1 \leq a_2$  then  $a_1$  else  $a_2$ 
```

► *Maximum* von  $e_1$  und  $e_2$ :

```
let  $a_1 = e_1$   
let  $a_2 = e_2$   
if  $a_1 \leq a_2$  then  $a_2$  else  $a_1$ 
```

Warum?

III Werte

Ralf Hinze

Boolesche Werte

Natürliche Zahlen

Werte/-definitionen

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische Semantik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Funktions/-definitionen

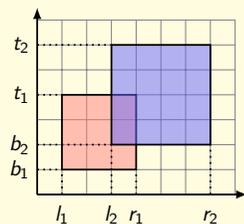
Funktionsausdrücke

Rekursion

Entwurfsmuster

161

### 13. Beispiel: Berechnung der Wohnfläche



```
let  $h_1 = 1$   
let  $r_1 = 4$   
let  $b_1 = 1$   
let  $t_1 = 4$   
let  $h_2 = 3$   
let  $r_2 = 7$   
let  $b_2 = 2$   
let  $t_2 = 6$ 
```

Lösung:

```
let  $s_1 = r_1 - h_1$   
let  $s_2 = r_2 - h_2$   
let  $w = \min r_1 r_2 - \max h_1 h_2$   
let  $h = \min t_1 t_2 - \max b_1 b_2$   
 $s_1 * s_1 + s_2 * s_2 - w * h$ 
```

III Werte

Ralf Hinze

Boolesche Werte

Natürliche Zahlen

Werte/-definitionen

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische Semantik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Funktions/-definitionen

Funktionsausdrücke

Rekursion

Entwurfsmuster

162