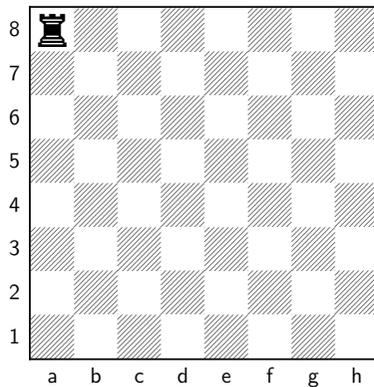


## 25. Knobelaufgabe #11

- Bewege den Turm von a8 nach h1, so dass jedes Feld *genau einmal* besucht wird.



- Ein Turm darf horizontal und vertikal, aber nicht diagonal ziehen.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare Muster

Records

Varianten

Rekursive Varianten

Widerlegbare Muster

Parametrisierte Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

385

## 25. Motivation

Parametrisierte Typen erhöhen — wie auch Funktionen — die Wiederverwendbarkeit von Programmen („one size fits all“).

Funktionen auf parametrisierten Typen halten mit dieser Entwicklung nicht Schritt. *Beispiel:* Länge einer Liste.

```
let rec length (list : List <Nat>) : Nat =  
  match list with | Nil → 0 | Cons (_, xs) → 1 + length xs
```

☞ Der Typ des Parameters, *List <Nat>*, schränkt die Anwendung von *length* auf Listen von *natürlichen Zahlen* ein. Um die Länge einer Liste von *Personen* zu bestimmen, müssen wir eine zweite Funktion programmieren.

```
let rec length (list : List <Person>) : Nat =  
  match list with | Nil → 0 | Cons (_, xs) → 1 + length xs
```

☞ Die Definition ist baugleich zur ersten, nur die Typangabe hat sich geändert. Für das Ausrechnen der Listenlänge spielt der Typ der Elemente aber gar keine Rolle.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare Muster

Records

Varianten

Rekursive Varianten

Widerlegbare Muster

Parametrisierte Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

386

## 25. Motivation

☞ Für jeden Elementtyp eine neue *length* Funktion zu programmieren, ist *mühsam* und *unökonomisch*. Werden im gleichen Kontext Längenfunktionen für zwei verschiedene Elementtypen benötigt, müssen wir uns zudem unterschiedliche Namen für die Funktionen ausdenken.

☞ Das Problem ist ähnlich dem, das die Einführung parametrisierter Typen motivierte. Ähnliches Problem, ähnliche Lösung?

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare Muster

Records

Varianten

Rekursive Varianten

Widerlegbare Muster

Parametrisierte Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

387

Mon dieu, ich verstehe die Aufregung nicht. Für die Länge von Lischen von Zahlen definiere ich:

```
function lengthnats (p : natslink) : integer;  
begin  
  if p = nil then  
    lengthnats := 0  
  else  
    lengthnats := lengthnats (p^.next) + 1  
  end;
```

Für die Länge von Lischen von Personen definiere ich:

```
function lengthpersons (p : personslink) : integer;  
begin  
  if p = nil then  
    lengthpersons := 0  
  else  
    lengthpersons := lengthpersons (p^.next) + 1  
  end;
```

Für die Länge von Lischen von Adressen definiere ich ...



Ich glaub, ich hab ein déjà-vu ...



IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare Muster

Records

Varianten

Rekursive Varianten

Widerlegbare Muster

Parametrisierte Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

388

## 25. Motivation

Ähnliches Problem, ähnliche Lösung?

Ja! So wie wir Typdefinitionen mit einem Typ parametrisieren, so können wir auch Funktionsdefinitionen mit einem Typ parametrisieren.

```
let rec length ⟨a⟩(list : List ⟨a⟩) : Nat =  
  match list with | Nil → 0 | Cons (_, xs) → 1 + length ⟨a⟩xs
```

☞ Die Funktion *length* hat jetzt zwei Parameter: einen Typparameter (*a*) und einen Werteparameter (*list*). Der Typparameter wird verwendet, um den Typ des Werteparameters festzulegen.

Wird die Funktion *length* aufgerufen, müssen für die formalen Parameter entsprechend aktuelle Parameter angegeben werden:

- ▶ ein Typ und
- ▶ eine Liste mit Elementen des angegebenen Typs.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

389

## 25. Motivation — polymorphe Funktionen

Wenden wir *length* auf einen konkreten Typ an, erhalten wir spezielle Längenfunktionen — Funktionen, die wir bisher mühsam per Hand programmieren mussten.

- ▶ *length* *(Nat)* für Listen von natürlichen Zahlen,
- ▶ *length* *(Bit)* für Listen von Binärziffern,
- ▶ *length* *(Person)* für Listen von Personen,
- ▶ *length* *(Address)* für Listen von Adressen,
- ▶ *length* *(List (Nat))* für Listen von Listen von natürlichen Zahlen,
- ▶ usw.

☞ Funktionen, die mit einem oder mehreren Typen parametrisiert sind, heißen auch *polymorphe* Funktionen nach dem griechischen Wort *πολυμορφία* für Vielgestaltigkeit.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

390

## 25. Motivation — polymorphe Funktionen

Labels parametrisierter Recordtypen und Konstruktoren parametrisierter Variantentypen sind im Prinzip polymorphe Funktionen bzw. Werte:

- ▶ *Nil* hat den Typ *List ⟨a⟩*;
- ▶ *Cons* hat den Typ *a \* List ⟨a⟩ → List ⟨a⟩*.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

391

## 25. Motivation — Peano Entwurfsmuster, programmiert

Blicken wir zurück, erkennen wir, dass viele Funktionen allgemeiner sind, als die Typangaben es vermuten lassen. *Zum Beispiel:*

```
let peano-pattern ⟨soln⟩(zero : 'soln,  
  succ : 'soln → 'soln) : Nat → 'soln =  
  let rec f (n : Nat) : 'soln =  
    if n = 0 then zero  
    else succ (f (n ÷ 1))  
  in f
```

☞ Jetzt können wir in Mini-F# ausdrücken, dass die Funktion für jeden beliebigen Typ von Lösungen funktioniert (siehe frühere Diskussion).

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

392



Super, damit kann ich endlich meine Implementierung der Fakultät ausprobieren.

```
Mini) peano-pattern ⟨Nat * Nat⟩
      ((0, 1), fun (n, s) → (n + 1, s * (n + 1))) 10
      (10, 3628800)
```

Pass mal auf, Lisa, ich hab mich mittlerweile mit den anonymen Funktionen angefreundet. Jetzt kommt der Hammer: man kommt auch ohne Paare aus!

```
Mini) peano-pattern ⟨Nat → Nat⟩
      (fun n → 1, fun s → fun n → s (n ÷ 1) * n) 10 10
      3628800
```



Clever, clever, Harry. Deine Funktion ist sogar noch allgemeiner: wenn Du sie mit  $m$  und  $n$  aufrufst ( $m \leq n$ ), berechnet sie  $n! \div (n - m)!$ .



## 25. Motivation — Sortieren durch Einfügen

Auch die Funktion *sort-by* lässt sich verallgemeinern.

### Sortieren durch Einfügen

```
let sort-by ⟨a⟩ (less-equal : 'a * 'a → Bool) : List ⟨a⟩ → List ⟨a⟩ =
  let rec insert (elem : 'a, list : List ⟨a⟩) : List ⟨a⟩ =
    match list with
    | Nil → Cons (elem, Nil)
    | Cons (x, xs) → if less-equal (elem, x)
                     then Cons (elem, list)
                     else Cons (x, insert (elem, xs))

  let rec sort (list : List ⟨a⟩) : List ⟨a⟩ =
    match list with
    | Nil → Nil
    | Cons (x, xs) → insert (x, sort xs)

  in sort
```

## 25. Motivation — Sortieren durch Einfügen

Jetzt können wir beliebige (!) Listen sortieren.

- ▶ Listen von natürlichen Zahlen:

```
sort-by ⟨Nat⟩ (fun (m, n) → m ≤ n)
sort-by ⟨Nat⟩ (fun (m, n) → m ≥ n)
```

- ▶ Listen von Binärziffern:

```
sort-by ⟨Bit⟩ (fun (b, c) → match (b, c) with
  | (One, _) → true
  | (Two, One) → false
  | (Two, Two) → true)
```

- ▶ Listen von Personen:

```
sort-by ⟨Person⟩ (fun (ann, bob) → ann.surname ≤ bob.surname)
```

- ▶ Listen von Listen von natürlichen Zahlen:

```
sort-by ⟨List ⟨Nat⟩⟩ (fun (ns1, ns2) → length ⟨Nat⟩ ns1 ≤ length ⟨Nat⟩ ns2)
```

## 25. Pragmatik

Wir sehen davon ab, Syntax und Semantik polymorpher Funktionen formal zu definieren.

Stattdessen geben wir uns pragmatisch und erlauben *Typparameter auszulassen*: sowohl bei der Definition (keine große Sache)

```
let rec length (list : List ⟨a⟩) : Nat = ...
let sort-by (less-equal : 'a * 'a → Bool) : List ⟨a⟩ → List ⟨a⟩ = ...
```

als auch bei der Anwendung (eine erhebliche Schreiberleichterung).

```
sort-by (fun (m, n) → m ≤ n)
sort-by (fun (ns1, ns2) → length ns1 ≤ length ns2)
```

## 25. Vertiefung

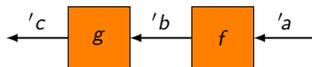
Polymorphen Funktionen ist gemeinsam, dass sie die Elemente eines polymorphen Typs nicht analysieren oder inspizieren (oder gar generieren), sondern nur transportieren (oder womöglich ignorieren).

Mini) **let** *id*  $x = x$   
**val** *id* : 'a → 'a

Mini) **let** *constant*  $a b = a$   
**val** *constant* : 'a → 'b → 'a

Mini) **let** *compose*  $g f x = g (f x)$   
**val** *compose* : ('b → 'c) → ('a → 'b) → ('a → 'c)

☞ *compose* ist ebenfalls eine Funktion höherer Ordnung: sie definiert die Komposition (Hintereinanderschaltung) zweier Funktionen.



IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare

Muster

Records

Varianten

Rekursive

Varianten

Widerlegbare

Muster

Parametrisierte

Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

397

## 25. Vertiefung — Listenzugriff

**Aufgabe:** Bestimmung des  $n$ -ten Elements einer Liste.

**let rec** *nth* (*list* : List 'a, *n* : Nat) : 'a =

☞ Was machen wir, wenn die Liste weniger als  $n$  Elemente hat?

**Idee:** die beiden möglichen Resultate des Zugriffs, erfolglos und erfolgreich, mit einem Datentyp darstellen.

**type** *Option* 'a = | None | Some of 'a

Mit diesem neuen Typ können wir die Signatur von *nth* verfeinern. Mit dem Struktur Entwurfsmuster für *List* erhalten wir:

**let rec** *nth* (*list* : List 'a, *n* : Nat) : Option 'a =  
**match** *list* **with**  
 | Nil → ...  
 | Cons (x, xs) → ... *nth* (xs, ...) ...

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare

Muster

Records

Varianten

Rekursive

Varianten

Widerlegbare

Muster

Parametrisierte

Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

398

## 25. Vertiefung — Listenzugriff

► **Rekursionsbasis:** der Index ist zu groß.

**let rec** *nth* (*list* : List 'a, *n* : Nat) : Option 'a =  
**match** *list* **with**  
 | Nil → None  
 | Cons (x, xs) → ... *nth* (xs, ...) ...

► **Rekursionsschritt:** zusätzliche Fallunterscheidung über  $n$ .

**let rec** *nth* (*list* : List 'a, *n* : Nat) : Option 'a =  
**match** *list* **with**  
 | Nil → None  
 | Cons (x, xs) → **if**  $n = 0$  **then** Some x  
                                   **else** *nth* (xs,  $n - 1$ )

☞ Die Funktion *nth* sollte nicht *missbraucht* werden, um über eine Liste zu iterieren!

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare

Muster

Records

Varianten

Rekursive

Varianten

Widerlegbare

Muster

Parametrisierte

Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

399

## 25. Über den Tellerrand: F#

Listen sind in F# vordefiniert. Allerdings unterscheidet sich die Notation etwas:

- $T$  *list* statt *List*  $\langle T \rangle$  (Postfix- statt Präfixnotation),
  - [] statt *Nil*, und
  - $x :: xs$  statt *Cons*  $(x, xs)$  (Infix- statt Präfixnotation).
- ☞  $[x_1; x_2; x_3]$  kürzt  $x_1 :: (x_2 :: (x_3 :: []))$  ab.

**Beispiel:** Bestimmung des  $n$ -ten Elements einer Liste.

**let rec** *nth* (*list* : 'a list, *n* : int) : 'a option =  
**match** *list* **with**  
 | [] → None  
 | x :: xs → **if**  $n = 0$  **then** Some x  
                                   **else** *nth* (xs,  $n - 1$ )

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare

Muster

Records

Varianten

Rekursive

Varianten

Widerlegbare

Muster

Parametrisierte

Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

400

## 25. Über den Tellerrand: F#

F# erlaubt, die Typen von Funktionsparametern und -ergebnissen auszulassen — die fehlenden Informationen werden automatisch inferiert (Typinferenz).

Beliebige Grade an Flexibilität:

```
let rec length (xs : 'a list) : int = match xs with ...
```

```
let rec length (xs : 'a list) = match xs with ...
```

```
let rec length (xs) = match xs with ...
```

```
let rec length = function ...
```

☞ **function** *m* ist eine beliebte Abkürzung für den Ausdruck **fun** *x* → **match** *x* **with** *m*.  
Beliebt, weil die Einführung eines Parameters vermieden wird (neue Namen zu erfinden ist schwer).

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

401

## 25. Über den Tellerrand: F#

Beispiel: enthält eine Liste ein gegebenes Element?

```
let rec contains key = function
```

```
| [] → false
```

```
| x :: xs → key = x || contains key xs
```

Beispiel: Konkatenation zweier Listen.

```
let rec append list y =
```

```
match list with
```

```
| [] → y
```

```
| x :: xs → x :: append xs y
```

☞ **append** *x* *y* ist als Infixoperator vordefiniert: *x* @ *y*, z.B. [4; 7] @ [1; 1] = [4; 7; 1; 1].  
(Was ist der Typ von **append** aka @? Und von **contains**?)

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Motivation

Pragmatik

Vertiefung

Über den Tellerrand

Arrays

402

## 26. Motivation

Wir haben verschiedene Möglichkeiten kennengelernt, Daten zu aggregieren.

### ▶ Tupel und Records:

- ▶ feste Anzahl von Daten *verschiedenen* Typs,
- ▶ Zugriff in konstanter Zeit.

### ▶ Listen:

- ▶ beliebige Anzahl von Daten des *gleichen* Typs,
- ▶ Zugriff in linearer Zeit.

### ▶ Fehlt:

- ▶ beliebige Anzahl von Daten des *gleichen* Typs,
- ▶ Zugriff in *konstanter* Zeit.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische  
Semantik

Vertiefung

403

## 26. Motivation

☞ Diese Lücke schließen Arrays (auch: Felder oder Reihungen).

Konstruktion:

```
[|2; 3; 5; 7; 11|]
```

ist ein Array der Größe 5. Mit *a.Length* wird die Größe bzw. Länge eines Arrays ermittelt, z.B. [|2; 3; 5; 7; 11|.Length = 5.

**Zugriff:** ist *e*<sub>2</sub> ein Ausdruck, der zu einem Array auswertet, und *e*<sub>1</sub> ein arithmetischer Ausdruck, dann kann mit

```
e2.[e1]
```

auf die entsprechende Komponente zugegriffen werden.

☞ Nummerierung ab 0, z.B. [|2; 3; 5; 7; 11|.3] = 7.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische  
Semantik

Vertiefung

404

## 26. Motivation

Arrays können nicht nur durch Aufzählung der Elemente, sondern auch mittels einer Bildungsvorschrift erzeugt werden.

```
[[ for i in 0..9 → i * i]]
```

ist das Array der ersten zehn Quadratzahlen.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare  
Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive  
Varianten  
Widerlegbare  
Muster  
Parametrisierte  
Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische  
Semantik  
Vertiefung

405

## 26. Demo

```
Mini) [[]]
Mini) [[2; 3; 5; 7; 11]]
Mini) [[2; 3; 5; 7; 11]]
Mini) [[ for i in 0..9 → 4711]]
Mini) [[4711; 4711; 4711; 4711; 4711; 4711; 4711; 4711; 4711; 4711]]
Mini) [[ for i in 0..9 → i]]
Mini) [[0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9]]
Mini) [[ for i in 0..9 → i * i]]
Mini) [[0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81]]
Mini) [[ for i in 0..7 → [[ for j in 1..i → i * j]]]]
Mini) [[[]];
        [1];
        [2; 4];
        [3; 6; 9];
        [4; 8; 12; 16];
        [5; 10; 15; 20; 25];
        [6; 12; 18; 24; 30; 36];
        [7; 14; 21; 28; 35; 42; 49]]]
```

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare  
Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive  
Varianten  
Widerlegbare  
Muster  
Parametrisierte  
Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische  
Semantik  
Vertiefung

406

## 26. Arrays versus Funktionen

Arrays sind Funktionen recht ähnlich.

Typ	$t_1 \rightarrow t_2$	$Array \langle t_2 \rangle \quad (t_1 = Int)$
Konstruktion	— $fun \ x \rightarrow e_3$	$[[e_0; \dots; e_{n-1}]]$ $[[ for \ x \ in \ 0..n-1 \rightarrow e_3 ]]$
Elimination	$e_2 \ e_1$ —	$e_2.[e_1]$ $e.Length$

☞ Der Definitionsbereich eines Arrays ist stets ein Anfangsstück der natürlichen Zahlen. Haben wir das schon einmal gesehen?

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare  
Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive  
Varianten  
Widerlegbare  
Muster  
Parametrisierte  
Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische  
Semantik  
Vertiefung

407

## 26. Arrays versus Sequenzen

Zur Erinnerung: endliche Abbildungen des Typs  $\mathbb{N} \rightarrow_{fin} A$  heißen Sequenzen (Folie 60).

- ▶ Sequenzen sind Bestandteil der Sprache, mit der wir *über* die Sprache Mini-F# reden.
- ▶ Sequenzen sind Bestandteil von Mini-F#.

☞ Fachjargon: Arrays *internalisieren* Sequenzen. Umgekehrt verwenden wir Sequenzen, um die Semantik von Arrays und Operationen auf Arrays präzise zu beschreiben.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare  
Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive  
Varianten  
Widerlegbare  
Muster  
Parametrisierte  
Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische  
Semantik  
Vertiefung

408

## 26. Abstrakte Syntax

$e ::= \dots$   
 $| [e_0; \dots; e_{n-1}]$   
 $| [\text{for } x \text{ in } e_1 \dots e_2 \rightarrow e_3]$   
 $| e_2.[e_1]$   
 $| e.Length$

**Arrays:**  
 Konstruktion durch Aufzählung ( $n \in \mathbb{Z}$ )  
 Konstruktion durch Bildungsvorschrift  
 Subskription  
 Größe eines Arrays

☞ Eckige Klammern,  $[ ]$  und  $[ ]$ , sind das Markenzeichen der Sprachkonstrukte, die Arrays konstruieren.

☞ Das Konstrukt  $[\text{for } x \text{ in } e_1 \dots e_2 \rightarrow e_3]$  führt den Bezeichner  $x$  neu ein;  $x$  ist in  $e_3$  sichtbar.

☞ Der Ausdruck  $e_1$  in  $e_2.[e_1]$  heißt *Index*.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare Muster

Records

Varianten

Rekursive Varianten

Widerlegbare Muster

Parametrisierte Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische Semantik

Vertiefung

409

## 26. Statische Semantik

Der Typ eines Arrays ist mit dem Typ der Elemente parametrisiert.

$t ::= \dots$   
 $| \text{Array } \langle t \rangle$

**Typen:**  
 Arraytyp

Typregel:

$$\frac{\Sigma \vdash e_i : t \quad | \quad i \in \mathbb{N}_n}{\Sigma \vdash [e_0; \dots; e_{n-1}] : \text{Array } \langle t \rangle}$$

☞ Die Notation  $\phi_i \mid i \in \mathbb{N}_n$  ist eine kompakte Schreibweise für eine Regel mit den  $n$  Voraussetzungen  $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ .

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare Muster

Records

Varianten

Rekursive Varianten

Widerlegbare Muster

Parametrisierte Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische Semantik

Vertiefung

410

## 26. Statische Semantik

Typregel:

$$\frac{\Sigma \vdash e_1 : \text{Int} \quad \Sigma \vdash e_2 : \text{Int} \quad \Sigma, \{x \mapsto \text{Int}\} \vdash e_3 : t}{\Sigma \vdash [\text{for } x \text{ in } e_1 \dots e_2 \rightarrow e_3] : \text{Array } \langle t \rangle}$$

$$\frac{\Sigma \vdash e_2 : \text{Array } \langle t \rangle \quad \Sigma \vdash e_1 : \text{Int}}{\Sigma \vdash e_2.[e_1] : t}$$

$$\frac{\Sigma \vdash e : \text{Array } \langle t \rangle}{\Sigma \vdash e.Length : \text{Int}}$$

☞  $\text{for } x \text{ in } e_1 \dots e_2$  arbeitet auch mit anderen Zahlentypen, nicht nur mit  $\text{Int}$ .

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare Muster

Records

Varianten

Rekursive Varianten

Widerlegbare Muster

Parametrisierte Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische Semantik

Vertiefung

411

## 26. Statische Semantik — Extremfälle

- ▶  $n = 0$ : Felder dürfen leer sein.
  - ▶  $[ ]$ ,
  - ▶  $[\text{for } x \text{ in } 1..0 \rightarrow x]$ ,
  - ▶  $[\text{for } x \text{ in } l..r \rightarrow e]$  mit  $l > r$ ,
  - ▶ dann gilt:  $e.Length = 0$ .
  - ▶ Das leere Feld  $[ ]$  hat den Typ  $\text{Array } \langle t \rangle$  für einen beliebigen Typ  $t$ .
- ▶  $n = 1$ : Felder können genau ein Element enthalten.
  - ▶  $[4711]$ ,
  - ▶  $[\text{for } x \text{ in } 0..0 \rightarrow 4711]$ ,
  - ▶  $[\text{for } x \text{ in } l..r \rightarrow e]$  mit  $l = r$ ,
  - ▶ dann gilt:  $e.Length = 1$ .
- ▶  $n = 2$ : ...

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare Muster

Records

Varianten

Rekursive Varianten

Widerlegbare Muster

Parametrisierte Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische Semantik

Vertiefung

412

## 26. Dynamische Semantik

IV Datentypen  
Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive Varianten  
Widerlegbare Muster  
Parametrisierte Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung

Der Wert eines Arrayausdrucks ist eine Sequenz, eine endliche Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow_{\text{fin}} \text{Val}$ ; jedem Index wird die entsprechende Komponente zugeordnet.

Beispiele:

- ▶  $[\ ]$  wertet zu  $\epsilon$  aus;
- ▶  $[4711]$  wertet zu  $\{0 \mapsto 4711\}$  aus;
- ▶  $[2; 3; 5; 7; 11]$  wertet zu  $\{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 7, 4 \mapsto 11\}$  aus.

413

## 26. Dynamische Semantik

IV Datentypen  
Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive Varianten  
Widerlegbare Muster  
Parametrisierte Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung

$s \in \text{Val}^*$   
 $\nu ::= \dots$   
 $\quad | s$

Werte:  
Array (-wert)

Auswertungsregeln:

$$\frac{\delta \vdash e_i \Downarrow \nu_i \quad | \quad i \in \mathbb{N}_n}{\delta \vdash [e_0, \dots, e_{n-1}] \Downarrow \{i \mapsto \nu_i \mid i \in \mathbb{N}_n\}}$$

$$\frac{\delta \vdash e_1 \Downarrow l \quad \delta \vdash e_2 \Downarrow r \quad \delta, \{x \mapsto i\} \vdash e_3 \Downarrow \nu_i \quad | \quad i \in \{l..r\}}{\delta \vdash [\text{for } x \text{ in } e_1 .. e_2 \rightarrow e_3] \Downarrow \{i - l \mapsto \nu_i \mid i \in \{l..r\}\}}$$

☞ Es werden zunächst die Arraygrenzen ausgerechnet, dann wird der Bezeichner  $x$  nacheinander an die Werte  $l, \dots, r$  gebunden und bezüglich jeder Bindung wird der Rumpf  $e_3$  ausgerechnet.

414

## 26. Dynamische Semantik

IV Datentypen  
Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive Varianten  
Widerlegbare Muster  
Parametrisierte Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung

Auswertungsregeln:

$$\frac{\delta \vdash e_2 \Downarrow s \quad \delta \vdash e_1 \Downarrow i}{\delta \vdash e_2.[e_1] \Downarrow s(i)} \quad i < \text{len } s$$

$$\frac{\delta \vdash e \Downarrow s}{\delta \vdash e.\text{Length} \Downarrow \text{len } s}$$

☞ Ein Array ist eine endliche Abbildung; Subskription ist entsprechend Funktionsapplikation.

☞ Die Subskription  $e_2.[e_1]$  ist nur definiert, wenn der Index  $e_1$  im Definitionsbereich der endlichen Abbildung liegt.

415

## 26. Vertiefung — Spiegelung

IV Datentypen  
Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive Varianten  
Widerlegbare Muster  
Parametrisierte Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung

Arraytransformationen lassen sich oftmals mit dem **for**-Konstrukt (Konstruktion durch Bildungsvorschrift) programmieren.

Beispiel: Spiegelung eines Arrays.

**let** *rec* *reverse*  $\langle a \rangle (a : \text{Array } \langle a \rangle) =$   
**let**  $n = a.\text{Length}$  **in**  
 $[\text{for } i \text{ in } 1..n \rightarrow a.[n - i]];$

☞ *reverse* ist eine polymorphe Funktion.

Mini) *reverse* $[\text{for } i \text{ in } 0..9 \rightarrow i * i]$   
 $[81; 64; 49; 36; 25; 16; 9; 4; 1; 0]$

416

## 26. Vertiefung — Konkatenation

Beispiel: Konkatenation zweier Arrays.

```
let rec append (a : Array <'a>, b : Array <'a>) : Array <'a> =  
  [| for i in 0 .. a.Length + b.Length - 1 →  
    if i < a.Length then a.[i]  
    else b.[i - a.Length] |]
```

☞ `append` ist eine polymorphe Funktion.

☞ Vergleiche mit der Konkatenation  $s_1 \cdot s_2$  von Sequenzen (Folie 61; Arrays internalisieren Sequenzen).

```
Mini) append ([| for i in 0 .. 9 → i |], reverse[| for i in 0 .. 9 → i |])  
[| 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 9; 8; 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1; 0 |]
```

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische  
Semantik

Vertiefung

417

## 26. Vertiefung — Entwurfsmuster

Der „Definitionsbereich“ des Arrays  $a$  ist durch das Intervall  $(0, a.Length - 1)$  gegeben. Somit können wir die Programmierung von arrayverarbeitenden Funktionen so ähnlich angehen, wie die von Funktionen auf Suchintervallen.

Entwurfsmuster für Arrays (à la Peano):

```
let f (a : Array <t1>) : t2 =  
  let rec g (i : Int) : t2 =  
    if i = a.Length then ...  
    else ... g (i + 1) ...  
  in g 0
```

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische  
Semantik

Vertiefung

418

## 26. Entwurfsmuster — Summe

Beispiel: Elemente eines Arrays aufaddieren (das Pendant zur Funktion  $sum : List \langle Nat \rangle \rightarrow Nat$ ).

Das Entwurfsmuster für Arrays gibt vor:

```
let sum (a : Array <Nat>) : Nat =  
  let rec s (i : Int) : Nat =  
    if i = a.Length then ...  
    else ... s (i + 1) ...  
  in s 0
```

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische  
Semantik

Vertiefung

419

## 26. Entwurfsmuster — Summe

► Rekursionsbasis:  $sum[] = 0!$

```
let sum (a : Array <Nat>) : Nat =  
  let rec s (i : Int) : Nat =  
    if i = a.Length then 0  
    else ... s (i + 1) ...  
  in s 0
```

► Rekursionsschritt: Wir addieren  $a.[i]$  zur Summe des Restarrays.

```
let sum (a : Array <Nat>) : Nat =  
  let rec s (i : Int) : Nat =  
    if i = a.Length then 0  
    else a.[i] + s (i + 1)  
  in s 0
```

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation

Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische  
Semantik

Vertiefung

420

## 26. Entwurfsmuster — Produkt

Beispiel: Elemente eines Arrays miteinander multiplizieren (das Pendant zur Funktion  $product : List \langle Nat \rangle \rightarrow Nat$ ).

Das Entwurfsmuster für Arrays gibt vor:

```
let product (a : Array <Nat>) : Nat =
  let rec p (i : Int) : Nat =
    if i = a.Length then ...
      else ... p (i + 1) ...
  in p 0
```

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive Varianten  
Widerlegbare Muster  
Parametrisierte Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung

421

## 26. Entwurfsmuster — Produkt

► Rekursionsbasis:  $product[] = 1!$

```
let product (a : Array <Nat>) : Nat =
  let rec p (i : Int) : Nat =
    if i = a.Length then 1
      else ... p (i + 1) ...
  in p 0
```

► Rekursionsschritt: Wir multiplizieren  $a[i]$  mit dem Produkt des Restarrays.

```
let product (a : Array <Nat>) : Nat =
  let rec p (i : Int) : Nat =
    if i = a.Length then 1
      else a[i] * p (i + 1)
  in p 0
```

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive Varianten  
Widerlegbare Muster  
Parametrisierte Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung

422

## 26. Alte Funktionen neu

Eine weitere Implementierung der Fakultät und der Potenzfunktion:

```
let factorial (n : Nat) : Nat =
  product[for i in 1..n -> i]
let power (x : Nat, n : Nat) : Nat =
  product[for i in 1..n -> x]
```

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive Varianten  
Widerlegbare Muster  
Parametrisierte Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung

423

## 26. Zusammenfassung

Wir haben das Repertoire von Mini-F# beträchtlich erweitert. *Teil III*: Werte, die von Werten abhängen. *Teil IV*: Typen, die von Typen abhängen und Werte, die von Typen abhängen.

hängt ab von	Wert	Typ
Wert	Funktion	polymorphe Funktion
Typ	?	parametrisierter Typ

Macht man die Größe von Arrays zum Bestandteil des Typs, dann erhält man ein Beispiel für einen Typ, der von Werten abhängt (sogenannter „dependent type“).

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel  
Unwiderlegbare Muster  
Records  
Varianten  
Rekursive Varianten  
Widerlegbare Muster  
Parametrisierte Typen  
Polymorphie  
Arrays  
Motivation  
Abstrakte Syntax  
Statische Semantik  
Dynamische Semantik  
Vertiefung

424

## 26. Zusammenfassung

Wir haben

- ▶ verschiedene Möglichkeiten kennengelernt, Daten zu aggregieren:
  - ▶ Tupel und Records,
  - ▶ Containertypen wie Listen,
  - ▶ Arrays;
- ▶ eine Möglichkeit kennengelernt, Daten zu vereinigen:
  - ▶ Variantentypen;
- ▶ Verschiedene Formen der Abstraktion kennengelernt:
  - ▶ parametrisierte Record- und Variantentypen,
  - ▶ polymorphe Funktionen;
- ▶ gesehen, dass jeder Typ ein Entwurfsmuster mitbringt;
- ▶ verschiedene Datenstrukturen kennengelernt:
  - ▶ Listen,
  - ▶ Arrays;
- ▶ und verschiedene Funktionen auf diesen Datenstrukturen programmiert.

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation  
Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische  
Semantik

Vertiefung

425

## 26. Paradigmen: funktionale Programmierung

*calcolare*  
den Wert bestimmen; rechnen; zählen

*functio*  
Verrichtung; Ausführung

*fungi*  
ausüben

IV Datentypen

Ralf Hinze

Tupel

Unwiderlegbare  
Muster

Records

Varianten

Rekursive  
Varianten

Widerlegbare  
Muster

Parametrisierte  
Typen

Polymorphie

Arrays

Motivation  
Abstrakte Syntax

Statische Semantik

Dynamische  
Semantik

Vertiefung

426