Grundlagen der Programmierung

Sprechstunde

Ralf Hinze

Fachbereich Informatik
Technische Universität Kaiserslautern

WS 2019/2020

Teil I

Einführung

1. Format der Sprechstunde

- Regeln ...
- ...keine.
- Sie dürfen mir beliebige Fragen stellen ...
- ...nur dürfen Sie nicht erwarten, dass ich auch alle beantworte.
- Für den Fall, dass Sie keine Fragen haben, bringe ich Material mit ...
  - 1. Stunde: Repetitorium
    - Quiz
    - Knobelaufgaben
  - 2. Stunde: Weiter über den Tellerrand
    - etwas Mathematik am Rande
    - zusätzliches Material: fortgeschritten, skurril, nützlich, wissenswert, Denkanstöße, ...

1. Hörerkreise

aus anderen Gründen

studiere Informatik

$\boxed{\text{Warum sind Sie hier?}}$

Nebenfach Informatik

1. Aufmerksamkeitskiller Smartphone

egal

auf jeden Fall

Soll die Verwendung von elektronischen Geräten wie Smartphones oder Laptops im Hörsaal strikt untersagt werden?

auf keinen Fall

1. Tipps, Ratschläge …

- Was brauchen Sie? Block und Stift!
- Was brauchen Sie nicht? Smartphone (oder Laptop).
- der (ideale) Ablauf einer Woche …

1. Tipps, Ratschläge …

- Seien Sie aktiv.
- Wenn es schwierig wird …
- …lassen Sie sich nicht entmutigen.
- (Frustrationstoleranz)
- Nehmen Sie die vielen Hilfsangebote war.
- Tipp: `https://motiviert-studiert.de/`
- (Scheitern ist keine Katastrophe.)

1. Knobelaufgabe #1

Ein Elb hat Ihnen 5 Gegenstände von unbekanntem Wert geschenkt. Die Gegenstände sollen ihrem Wert nach geordnet werden. Sie können dazu einem Orakel jeweils zwei Gegenstände vorlegen und erhalten dann Auskunft, welcher der beiden Gegenstände wertvoller ist.

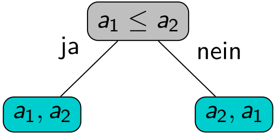
Wie oft müssen Sie das Orakel *im ungünstigsten Fall* fragen?

Im günstigsten Fall muss das Orakel 4-mal befragt werden. Entwickeln Sie eine Systematik, so dass das Orakel nicht häufiger als nötig beansprucht wird.

1. Knobelaufgabe #1

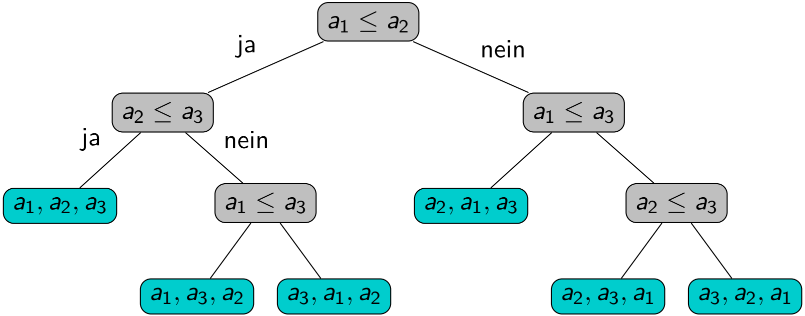
Tipp: einfache d.h. kleine Probleminstanzen lösen, um ein Gefühl für das Problem zu bekommen.

- $n = 0$: nichts zu tun;
- $n = 1$: nichts zu tun;
- $n = 2$: wie stelle ich die „Systematik“ dar? Programm (textuell) oder Entscheidungsbaum (graphisch):



1. Knobelaufgabe #1

- $n = 3$: ein möglicher Entscheidungsbaum:



Ein Pfad von der Wurzel (oben) zu einem Blatt (unten) entspricht einem Programmablauf. Ergebnis: Anordnung der drei Gegenstände.

1. Knobelaufgabe #1: Fragen, Fragen, Fragen ...

- Wieviele Anordnungen gibt es für n Gegenstände? Wieviele Blätter hat ein Entscheidungsbaum?
- Für die gleiche Anzahl von Gegenständen gibt es viele verschiedene Entscheidungsbäume mit unterschiedlichen Eigenschaften.
- Wir suchen den Entscheidungsbaum mit der geringsten Höhe.
- Die Höhe entspricht der Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt.
- Mit anderen Worten: wir suchen den kürzesten „längsten Pfad“.
- Der obige Entscheidungsbaum hat die Höhe 3; gibt es einen der Höhe 2?
- *Allgemein:* welche Höhe hat ein Entscheidungsbaum mindestens? Lässt sich ein idealer Entscheidungsbaum immer konstruieren?

2. Young Gauss

- A story about young Carl Friedrich Gauss (1777–1855):

  Der junge Gauss war kaum in die Rechenklasse eingetreten, als Büttner die Summation einer arithmetischen Reihe aufgab. Die Aufgabe war indess kaum ausgesprochen als Gauss die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: "Ligget se." (Da liegt sie.)

  One day, when young Carl was a pupil in Mr. Büttner's arithmetic class, Mr. Büttner posed the problem of adding an arithmetic progression. He had barely finished describing this task when Gauss threw his slate board on the table saying, in low Brunswick dialect, "Ligget se." (There she lies.)

  (Sartorius von Waltershausen: Gauss zum Gedächtnis, 1856)

- Mr. Büttner's task: $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$.

2. Young Gauss

- Now, $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = 5,050$.
- That's easy to see if we rearrange the numbers:

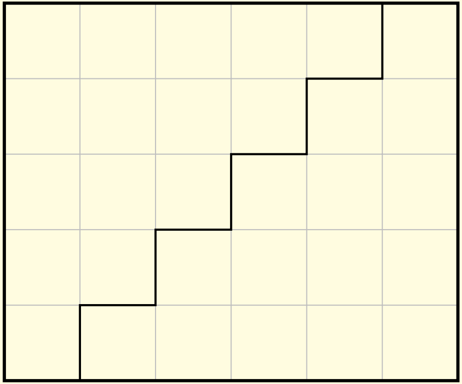
$$\begin{array}{rrrcrr} & 1 & 2 & \cdots & 49 & 50 \\ + & 100 & 99 & \cdots & 52 & 51 \\ \hline = & 101 & 101 & \cdots & 101 & 101 \end{array}$$

- We have 50 columns of 101 which gives $5,050$.
- The statement generalizes to an arbitrary upper bound:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{1}{2} n \cdot (n+1).$$

2. Young Gauss

- The first n numbers sum up to $\frac{1}{2}n \cdot (n+1)$.
- A *visual* proof:

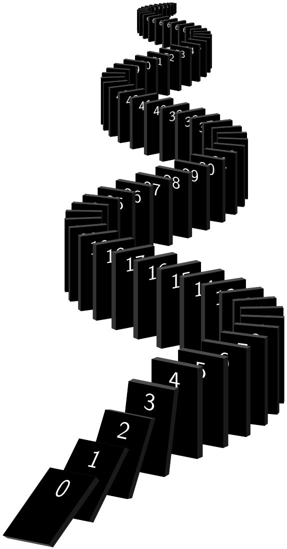


- The whole area is $n \cdot (n+1)$, of which $1 + \cdots + n$ is one half.
- How can we *formally* prove the statement?

2. Structural Induction

- *Task:* we want to show a property $P(n)$ for all natural numbers $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Proof by induction:
  - *Base:* show $P(0)$.
  - *Step:* assume $P(n)$ and show $P(n + 1)$ for all natural numbers.
- Induction is based on the *domino principle*: to knock down a line of dominoes, we have to
  - push the first domino, and
  - make sure that each domino will topple the next one as it falls.

2. Structural Induction: Domino Principle



2. Formal Proof of $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

- *Base:* we have to show $1 + \cdots + 0 = \frac{1}{2}0(0+1)$.

$$
\begin{aligned}
& 1 + \cdots + 0 \\
= \quad & \{ \text{ empty sum is } 0 \ \} \\
& 0 \\
= \quad & \{ \text{ arithmetic } \} \\
& \frac{1}{2}0(0+1)
\end{aligned}
$$

- *Step:* we have to show $1 + \cdots + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) \\
= \quad & \{ \text{ induction assumption: } 1 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \ \} \\
& \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\
= \quad & \{ \text{ arithmetic } \} \\
& \frac{1}{2}(n+1)(n+2)
\end{aligned}
$$

2. Another Warm-up Example

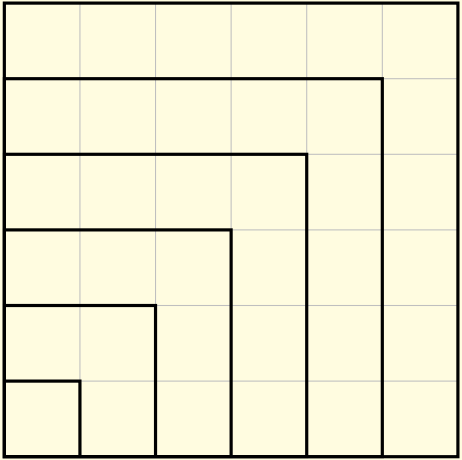
- If we sum up the odd numbers, we obtain ...

$$
\begin{array}{lcr}
1 & = & 1 \\
1 + 3 & = & 4 \\
1 + 3 + 5 & = & 9 \\
1 + 3 + 5 + 7 & = & 16 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 & = & 25 \\
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 & = & 36
\end{array}
$$

- Can you spot a pattern?

2. Another Warm-up Example

- The first n odd numbers sum up to n^2.
- A *visual* proof:



- Again, how can we *formally* prove the statement?

2. Formal Proof of $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

- *Base:* we have to show $1 + \cdots + -1 = 0^2$.

$$
\begin{aligned}
& 1 + \cdots + -1 \\
= \quad & \quad \{ \text{ empty sum is } 0 \ \} \\
& 0 \\
= \quad & \quad \{ \text{ arithmetic } \} \\
& 0^2
\end{aligned}
$$

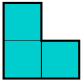
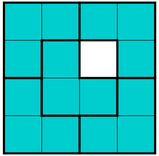
- *Step:* we have to show $1 + \cdots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

$$
\begin{aligned}
& 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) \\
= \quad & \quad \{ \text{ induction assumption: } 1 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \ \} \\
& n^2 + (2n + 1) \\
= \quad & \quad \{ \text{ binomial theorem: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \ \} \\
& (n + 1)^2
\end{aligned}
$$

2. Exercise: Tiling with Trominos

- *Task:*

> Tile a square checker-board with L-trominos, which is a shape composed of three squares meeting in an L-shape.

- The goal is to cover as much of a $2^n \times 2^n$ checker-board with L-trominos as possible, with no overlaps, and with all L-trominos inside the square.
- We cannot cover every square—the number of squares is 4^n, which is not a multiple of 3—but we can cover all but one *arbitrary* square.
- (*Exercise:* show $4^n \bmod 3 = 1$ by induction.)

2. Strong Induction

- *Task:* we want to show a property $P(n)$ for all natural numbers $n = 0, 1, 2, \ldots$
- Proof by strong induction:
  - *Step:* assume $P(0)$, ..., $P(n-1)$ and show $P(n)$ for all natural numbers.
- The base case now implicit: if $n = 0$, we cannot assume anything.

2. Example: Postage

Claim:

Given an unlimited supply of 3-cent and 5-cent stamps,

...


...

we can make any amount of postage larger than 7 cents.

2. Postage: Proof of Claim

- Three base cases and one step:
- *Case* $n = 8$*:* easy as $8 = 3 + 5$.
- *Case* $n = 9$*:* easy as $9 = 3 + 3 + 3$.
- *Case* $n = 10$*:* easy as $10 = 5 + 5$.
- *Case* $n > 10$*:* We have $n > n - 3 > 7$. By the induction assumption, we can make $n - 3$ cents in postage; adding a 3-cent stamp gives us n cents in postage.

2. Exercise: Strong Induction

Prove that any integer can be written in the form

$$\sum_i \pm 3^i$$

where the exponents i are distinct natural numbers.

$$\sum_{i=0}^{n} d_i \cdot 3^i \quad \text{wobei } d_i \in \{-1, 0, 1\}$$

For example:

$$\begin{aligned} 17 &= 3^3 - 3^2 - 3^0 \\ 25 &= 3^3 - 3^1 + 3^0 \\ 42 &= 3^4 - 3^3 - 3^2 - 3^1 \end{aligned}$$

Hint: think positional number systems — but think ternary, not binary.

2. A Wrong Proof

- Consider a herd of $n + 1$ horses.
- *Claim:* All horses are of the same colour.
- *Base:* Trivial, as there is only one horse.
- *Step:* We may assume that the statement is true for n horses. Now, consider a herd of $n + 1$ horses, lined up in sequence.
  - By the induction assumption, the first n horses are of the same colour.
  - By the induction assumption, the last n horses are of the same colour.
  - Thus, the first horse, the middle horses, and the last horse are all of the same colour.
- What's wrong with the proof?