Teil VIII

Algorithmik II

16. Rechnen mit Braun Bäumen — Fortsetzung

```
type Tree ⟨'elem⟩
  | Leaf
  | Node of 'elem ∗ Tree ⟨'elem⟩ ∗ Tree ⟨'elem⟩

let rec size = function
  | Leaf          → 0
  | Node (_, l, r) → 1 + size l + size r
```

Invariante: für jeden Knoten *Node* (a, l, r) gilt, dass der linke Teilbaum l genau so viele Elemente wie der rechte Teilbaum r enthält oder ein Element mehr.

$$0 \leqslant \mathit{size}\ l - \mathit{size}\ r \leqslant 1$$

☞ Die Struktur eines Braun Baums ist durch die Anzahl der Elemente eindeutig festgelegt.

16. Größe eines Braun Baums

Wie schnell können wir die Größe eines Braun Baums bestimmen? Die Funktion *size* benötigt lineare Laufzeit. *Surely, we can do better!*

Idee: Invariante ausnutzen.

```
let rec size = function
  | Leaf          → 0
  | Node (_, l, r) → let n = size r
                     in  1 + 2 * n + (0 oder 1)
```

☞ Wie können wir rausbekommen, ob der linke Teilbaum größer ist?

16. Größe eines Braun Baums

Wie schnell können wir die Größe eines Braun Baums bestimmen? Die Funktion *size* benötigt lineare Laufzeit. *Surely, we can do better!*

Idee: Invariante ausnutzen.

```
let rec size = function
    | Leaf           → 0
    | Node (_, l, r) → let n = size r
                       in  1 + 2 * n + (0 oder 1)
```

☞ Wie können wir rausbekommen, ob der linke Teilbaum größer ist?

16. Größe eines Braun Baums

Idee: Wir versuchen auf das $(n + 1)$-te Element zuzugreifen (an Position n, da Nummerierung ab 0):

$$
\begin{array}{l}
\textbf{let rec } \mathit{size} = \textbf{function} \\
\quad \mid \mathit{Leaf} \qquad\qquad \to 0 \\
\quad \mid \mathit{Node}\ (\_, l, r) \to \textbf{let } n = \mathit{size}\ r \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \textbf{in } \ 1 + 2 * n + (\textbf{match } \mathit{nth}\ (l, n)\ \textbf{with} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mid \mathit{None} \quad \to 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mid \mathit{Some}\ \_ \to 1)
\end{array}
$$

Gelingt der Zugriff, dann ist der linke Teilbaum größer; schlägt der Zugriff fehl, dann sind beide Teilbäume gleich groß.

Laufzeit: logarithmisch viele Zugriffe, jeder Zugriff hat logarithmische Laufzeit, also $(\lg n)^2$.

16. Größe eines Braun Baums

Idee: Wir versuchen auf das $(n+1)$-te Element zuzugreifen (an Position n, da Nummerierung ab 0):

```
let rec size = function
    | Leaf          → 0
    | Node (_, l, r) → let n = size r
                       in  1 + 2 ∗ n + (match nth (l, n) with
                                         | None    →  0
                                         | Some _  →  1)
```

Gelingt der Zugriff, dann ist der linke Teilbaum größer; schlägt der Zugriff fehl, dann sind beide Teilbäume gleich groß.

Laufzeit: logarithmisch viele Zugriffe, jeder Zugriff hat logarithmische Laufzeit, also $(\lg n)^2$.

16. Konstruktion von Braun Bäumen

Wie schnell können wir einen Braun Baum konstruieren?

Gesucht: Umkehrfunktion von *to-list*.

$$\mathit{to\text{-}list} \ll \mathit{from\text{-}list} = \mathit{id}$$
$$\mathit{from\text{-}list} \ll \mathit{to\text{-}list} = \mathit{id}$$

☞ Da die Struktur eines Braun Baums durch die Anzahl der Elemente eindeutig festgelegt ist, hat *to-list* tatsächlich eine Inverse.

16. Konstruktion: Möglichkeit 1

Wir verwenden das *Struktur Entwurfsmuster* für Listen und fügen nacheinander die Listenelemente mit *cons* in einen anfangs leeren Braun Baum ein.

```
let rec from-list = function
    | []      → Leaf
    | x :: xs → cons x (from-list xs)
```

Laufzeit: cons hat eine logarithmische Laufzeit; somit ist die Gesamtlaufzeit linear-logarithmisch, $n \lg n$.

16. Konstruktion: Möglichkeit 1

Wir verwenden das *Struktur Entwurfsmuster* für Listen und fügen nacheinander die Listenelemente mit *cons* in einen anfangs leeren Braun Baum ein.

```
let rec from-list = function
    | []      → Leaf
    | x :: xs → cons x (from-list xs)
```

Laufzeit: cons hat eine logarithmische Laufzeit; somit ist die Gesamtlaufzeit linear-logarithmisch, $n \lg n$.

16. Konstruktion: Möglichkeit 2

Wir verwenden das *allgemeine Leibniz Entwurfsmuster* für Listen und kehren *to-list* um: aus *zip* wird *unzip* ...

$$
\begin{array}{l}
\textbf{let rec } \textit{to-list} = \textbf{function} \\
\quad \mid \textit{Leaf} \qquad\qquad \to [\,] \\
\quad \mid \textit{Node}\ (x, l, r) \to x :: \textit{zip}\ (\textit{to-list}\ l, \textit{to-list}\ r)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\textbf{let rec } \textit{from-list} = \textbf{function} \\
\quad \mid [\,] \qquad \to \textit{Leaf} \\
\quad \mid x :: xs \to \textbf{let}\ (xs_1, xs_2) = \textit{unzip}\ xs \\
\qquad\qquad\quad\ \ \textit{Node}\ (x, \textit{from-list}\ xs_1, \textit{from-list}\ xs_2)
\end{array}
$$

Laufzeit: lineare Laufzeit pro Rekursionsebene; logarithmische Rekursionstiefe; somit ist die Gesamtlaufzeit linear-logarithmisch, $n \lg n$.

16. Konstruktion: Möglichkeit 2

Wir verwenden das *allgemeine Leibniz Entwurfsmuster* für Listen und kehren *to-list* um: aus *zip* wird *unzip* ...

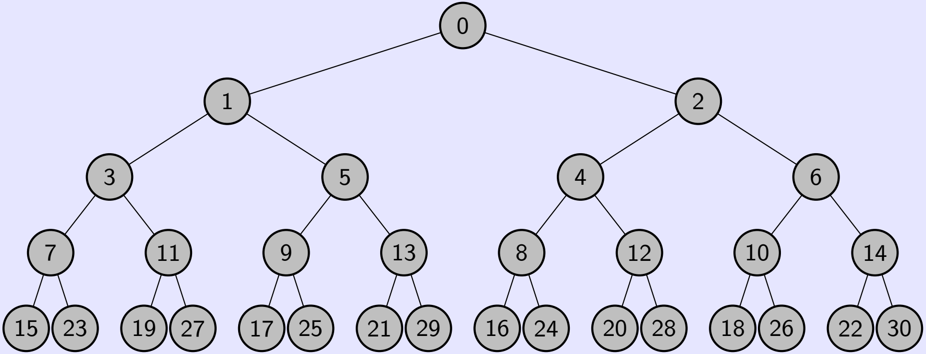
$$
\begin{array}{l}
\textbf{let rec } \textit{to-list} = \textbf{function} \\
\quad \mid \textit{Leaf} \qquad\qquad\quad\; \to [\,] \\
\quad \mid \textit{Node}\,(x, l, r) \to x :: \textit{zip}\,(\textit{to-list}\ l, \textit{to-list}\ r)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\textbf{let rec } \textit{from-list} = \textbf{function} \\
\quad \mid [\,] \qquad\quad \to \textit{Leaf} \\
\quad \mid x :: xs \to \textbf{let } (xs_1, xs_2) = \textit{unzip}\ xs \\
\qquad\qquad\qquad\;\; \textit{Node}\,(x, \textit{from-list}\ xs_1, \textit{from-list}\ xs_2)
\end{array}
$$

Laufzeit: lineare Laufzeit pro Rekursionsebene; logarithmische Rekursionstiefe; somit ist die Gesamtlaufzeit linear-logarithmisch, $n \lg n$.

16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Idee: wir konstruieren den Baum ebenenweise von unten nach oben („bottom-up" statt „top-down"). Laufendes Beispiel: *from-list* $[0\,..\,30]$.



16. Konstruktion: Möglichkeit 3

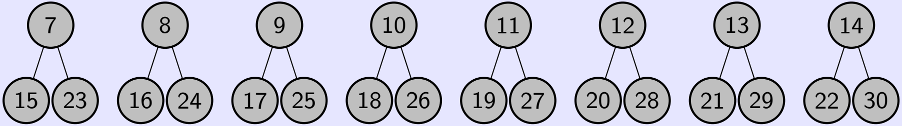
Erster Schritt: Wir teilen die Listenelemente ebenenweise auf.

$$
\begin{array}{c}
0\\
1\ \ 2\\
3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\\
7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\\
15\ \ 16\ \ 17\ \ 18\ \ 19\ \ 20\ \ 21\ \ 22\ \ 23\ \ 24\ \ 25\ \ 26\ \ 27\ \ 28\ \ 29\ \ 30
\end{array}
$$

☞ Die Anzahl der Elemente verdoppelt sich von einer Ebene zur nächsten.

16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Konstruktion der zweituntersten Ebene:

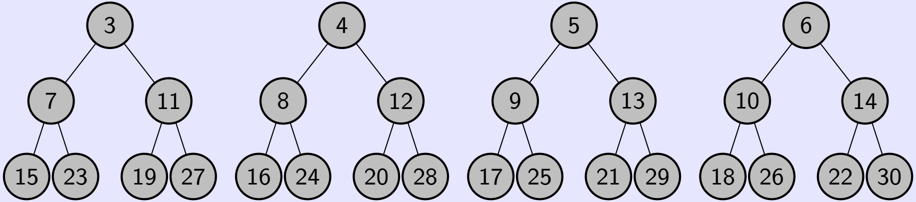


☞ Wurzeln der linken Teilbäume: 15 . . . 22; Wurzeln der rechten Teilbäume: 23 . . . 30.

15 16 17 18 19 20 21 22 ∥ 23 24 25 26 27 28 29 30

16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Konstruktion der drittuntersten Ebene:

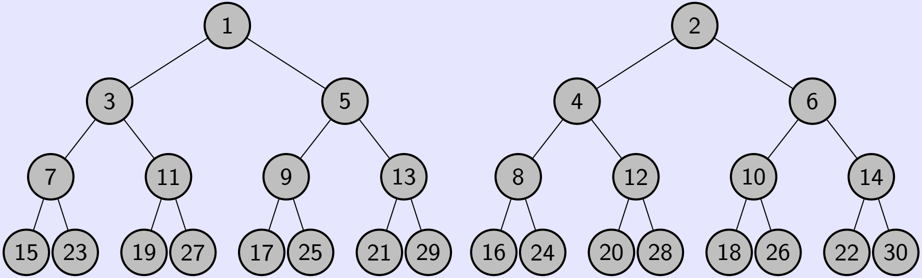


☞ Wurzeln der linken Teilbäume: $7 \ldots 10$; Wurzeln der rechten Teilbäume: $11 \ldots 14$.

$$7 \;\; 8 \;\; 9 \;\; 10 \;\; \| \;\; 11 \;\; 12 \;\; 13 \;\; 14$$

16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Konstruktion der viertuntersten Ebene:



☞ Wurzeln der linken Teilbäume: $3 \ldots 4$; Wurzeln der rechten Teilbäume: $5 \ldots 6$.

$$3 \;\; 4 \;\; \| \;\; 5 \;\; 6$$

16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Die Funktion *build k* überführt eine Liste von Elementen in eine Liste von *k* Braun Bäumen.

```
let single a = Node (a, Leaf, Leaf)

// val build : Nat → 'a list → (Tree ⟨'a⟩) list
let rec build k list =
  if k ⩾ length list
  then map single list @ [for i in 1 .. k − length list → Leaf]
  else let (xs, rest) = split-at k list
       let (ls, rs)   = split-at k (build (2 ∗ k) rest)
       map3 (fun x l r → Node (x, l, r)) xs ls rs

let from-list list = head (build 1 list)
```

☞ Sind nicht genügend Elemente für die unterste Ebene vorhanden, füllen wir mit *k − length list* Blättern auf. (Was machen *map* und *map3*?)

Laufzeit: pro Ebene proportional zur Anzahl der Knoten; somit insgesamt linear!

16. Konstruktion: Möglichkeit 3

Die Funktion *build k* überführt eine Liste von Elementen in eine Liste von *k* Braun Bäumen.

```
let single a = Node (a, Leaf, Leaf)

// val build : Nat → 'a list → (Tree ⟨'a⟩) list
let rec build k list =
  if k ⩾ length list
  then map single list @ [for i in 1 .. k − length list → Leaf]
  else let (xs, rest) = split-at k list
       let (ls, rs)   = split-at k (build (2 ∗ k) rest)
       map3 (fun x l r → Node (x, l, r)) xs ls rs

let from-list list = head (build 1 list)
```

☞ Sind nicht genügend Elemente für die unterste Ebene vorhanden, füllen wir mit $k - \mathit{length\ list}$ Blättern auf. (Was machen *map* und *map3*?)

Laufzeit: pro Ebene proportional zur Anzahl der Knoten; somit insgesamt linear!

16. Konstruktion: „top-down“ versus „bottom-up“

	top-down	bottom-up
Aufteilung	Liste von Elementen *unzip*	Liste von Teilbäumen *halve*